〔1〕

問 1

$\boxed{ア}$ $\dfrac{F_0}{M}$ $\boxed{イ}$ $\dfrac{F_0T}{M}$ $\boxed{ウ}$ 作用反作用 $\boxed{エ}$ $-F_0$ $\boxed{オ}$ $V-\dfrac{F_0T}{m}$ $\boxed{カ}$ 運動量 $\boxed{キ}$ $\mathrm{kg\cdot m/s}$

$\boxed{ク}$ F_0T $\boxed{ケ}$ 0 $\boxed{コ}$ $\dfrac{mM}{m+M}V$

解説

$\boxed{ア}$

加速度をa_{B}とすると，物体 B の運動方程式$Ma_{\mathrm{B}}=F_0$より，$a_{\mathrm{B}}=\dfrac{F_0}{M}$

別解

物体 B の速度がV_{B}になったとする。

物体 B の運動量変化＝物体 B が物体 A から受けた力積より，$MV_{\mathrm{B}}-0=F_0T$

よって，物体 B の加速度＝$\dfrac{V_{\mathrm{B}}}{T}=\dfrac{F_0}{M}$

$\boxed{イ}$

物体 B の加速度$=\dfrac{F_0}{M}$，加速時間Tより，物体 B の速度＝$\dfrac{F_0T}{M}$

別解

物体 B の速度がV_{B}になったとする。

物体 B の運動量変化＝物体 B が物体 A から受けた力積より，$MV_{\mathrm{B}}-0=F_0T$　$\therefore V_{\mathrm{B}}=\dfrac{F_0T}{M}$

$\boxed{オ}$

加速度をa_{A}とすると，物体 A の運動方程式$ma_{\mathrm{A}}=-F_0$より，$a_{\mathrm{A}}=-\dfrac{F_0}{m}$

よって，$V-a_{\mathrm{A}}T=V-\dfrac{F_0T}{m}$

別解

求める速度をV_{A}とすると，物体 A の運動量変化＝物体 A が物体 B から受けた力積より

$mV_{\mathrm{A}}-mV=-F_0T$　$\therefore V_{\mathrm{A}}=V-\dfrac{F_0T}{m}$

$\boxed{カ}$

衝突前の運動量の和は，条件より，$mV+0=mV$

衝突後の運動量の和は，$\boxed{イ}$と$\boxed{オ}$より，$m\left(V-\dfrac{F_0T}{m}\right)+M\cdot\dfrac{F_0T}{M}=mV$

キ

$$\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}=\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\mathrm{s}=\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

コ

衝突直後の物体 A，物体 B の速度をそれぞれ V_A，V_B とすると，

オ，イより，

$$V_\mathrm{A}=V-\frac{F_0T}{m}\quad\cdots①$$

$$V_\mathrm{B}=\frac{F_0T}{M}\quad\cdots②$$

反発係数を e（$0\le e\le 1$）とすると，$\dfrac{\text{衝突直後の相対速度}}{\text{衝突直前の相対速度}}=-e$ より，$\dfrac{V_\mathrm{A}-V_\mathrm{B}}{V-0}=-e$

$$\therefore V_\mathrm{B}-V_\mathrm{A}=eV\quad\cdots③$$

一方，①，②より，$V_\mathrm{B}-V_\mathrm{A}=F_0T\left(\dfrac{1}{M}+\dfrac{1}{m}\right)-V\quad\cdots④$

③，④より，$eV=F_0T\left(\dfrac{1}{M}+\dfrac{1}{m}\right)-V\quad\therefore(1+e)V=F_0T\left(\dfrac{1}{M}+\dfrac{1}{m}\right)$

よって，$F_0T=\dfrac{mM(1+e)}{m+M}V$　（$0\le e\le 1$）

これより，力積の大きさ F_0T が最小となるのは，$e=0$ の場合で，

このとき力積は $F_0T=\dfrac{mM}{m+M}V$ となる。

問 2

(1)

物体 C の加速度を a_{C} とすると，物体 C の運動方程式は　$ma_{\mathrm{C}} = mg\sin\theta \quad \therefore a_{\mathrm{C}} = g\sin\theta$

よって，$V_0{}^2 - 0^2 = 2g\sin\theta \cdot X \quad \therefore V_0 = \sqrt{2gX\sin\theta}$　・・・①

また，$V_0 = g\sin\theta \cdot t_1$　・・・②

①，②より，$t_1 = \dfrac{V_0}{g\sin\theta} = \sqrt{\dfrac{2X}{g\sin\theta}}$　・・・(答)

(2)

衝突に対する静止摩擦および重力の影響が無視できるから，

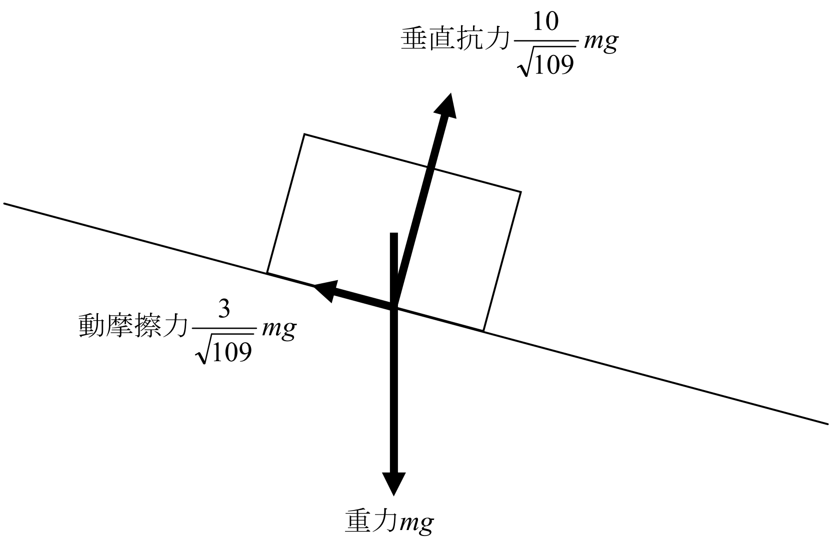
衝突直前と直後で物体 C と物体 D の間で運動量保存則が成り立つ。

よって，$mV_0 = mV_{\mathrm{C}} + mV_{\mathrm{D}} \quad \therefore V_0 = V_{\mathrm{C}} + V_{\mathrm{D}}$　・・・③

また，弾性衝突だから，$\dfrac{V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{D}}}{V_0} = -1 \quad \therefore V_0 = -V_{\mathrm{C}} + V_{\mathrm{D}}$　・・・④

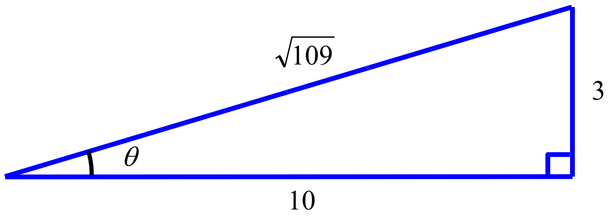
よって，③，④より，$V_{\mathrm{C}} = 0$，$V_{\mathrm{D}} = V_0$　・・・(答)

(3)



解説

下図は $\tan\theta = 0.3$ の直角三角形である。

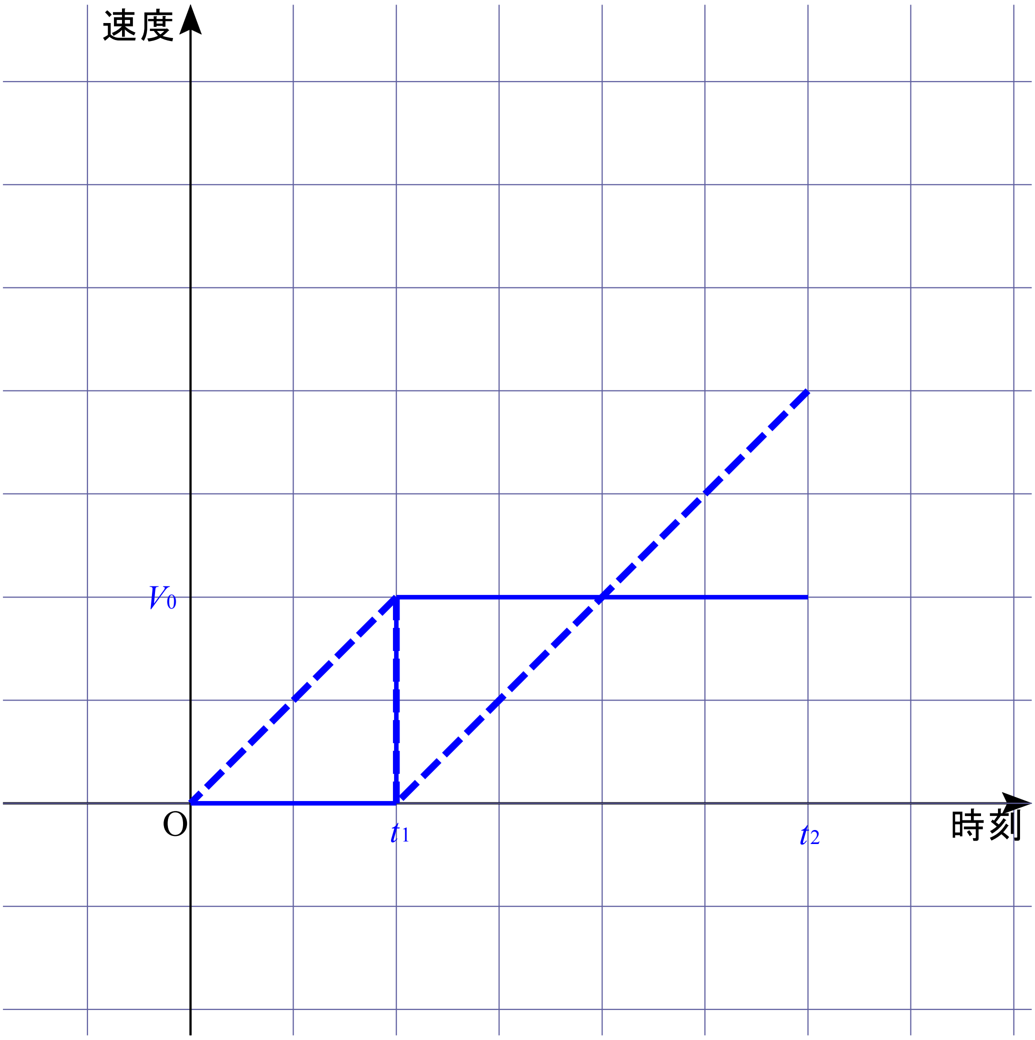


よって,

$$垂直抗力 = mg\cos\theta = mg \times \frac{10}{\sqrt{109}} = \frac{10}{\sqrt{109}}mg$$

$$動摩擦力 = \mu' mg\cos\theta = 0.3 \times \frac{10}{\sqrt{109}}mg = \frac{3}{\sqrt{109}}mg$$

(4)



解説

$t_1 \le t \le t_2$ における運動

物体 C

$t = t_1$ で速度 0 となった後，再び加速度 $g\sin\theta$ の等加速度運動をする。

物体 D

物体に働く動摩擦力と重力の斜面に平行な成分がつり合うので速度 V_0 で等速度運動

再び衝突する時刻 t_2

時刻 t_1 からのそれぞれの物体の移動距離が等しくなったときの時刻だから，

時刻 t_1 からの時刻軸と破線で囲まれた直角三角形の面積と

時刻軸と実線で囲まれた長方形の面積が等しくなる時刻を t_2 とすればよい。

(5)

時刻 t_1 で衝突してからの運動

物体 C

速度 0 になり，再び加速度 $g\sin\theta$ の等加速度運動を繰り返す。

物体 D

物体に働く重力の斜面下向きの成分は，$mg\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{109}}mg$ だから，動摩擦力とつり合う。

したがって，速度 V_0 で等速度運動をする。

再び衝突する時刻 t_2

時刻 t_1 からのそれぞれの物体の移動距離が等しくなったときの時刻だから，

$$\frac{1}{2}g\sin\theta(t_2 - t_1)^2 = V_0(t_2 - t_1) = Y$$

$t_2 \ne t_1$ より，$t_2 - t_1 = \dfrac{2V_0}{g\sin\theta}$

これと $\dfrac{V_0}{g\sin\theta} = \sqrt{\dfrac{2X}{g\sin\theta}}$ より，$t_2 - t_1 = 2\sqrt{\dfrac{2X}{g\sin\theta}} = \sqrt{\dfrac{8X}{g\sin\theta}}$

$$\therefore Y = \frac{1}{2}g\sin\theta(t_2 - t_1)^2$$

$$= \frac{1}{2}g\sin\theta\cdot\frac{8X}{g\sin\theta}$$

$$= 4X$$ ・・・(答)

〔2〕

問 1

(1) $\dfrac{\varepsilon_0 L^2}{d}V$ **(2)** $\dfrac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 L^2}$

解説

コンデンサーの電気容量 $C = \dfrac{\varepsilon_0 L^2}{d}$

十分時間が経過すると，回路に電流が流れなくなるから，抵抗 R_1 はただの導体になる。

したがって，極板間の電圧は V

よって，$Q = \dfrac{\varepsilon_0 L^2}{d}V$ ・・・答**(1)**

別解

極板間の電界の強さ $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 L^2}$

よって，$Q = \varepsilon_0 L^2 E = \dfrac{\varepsilon_0 L^2}{d}\cdot Ed = \dfrac{\varepsilon_0 L^2}{d}V$ ・・・答**(1)**

$U_\mathrm{C} = \dfrac{1}{2}QV = \dfrac{1}{2}Q\cdot\dfrac{Qd}{\varepsilon_0 L^2} = \dfrac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 L^2}$ ・・・答**(2)**

問 2

(1) $\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 L^2}\Delta x$ **(2)** $\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 L^2}$

解説

(1)

$V + \Delta V = E(d + \Delta x)$ より，

$$
\begin{aligned}
\Delta U_\mathrm{C} &= \frac{1}{2}Q(V + \Delta V) - \frac{1}{2}QV \\
&= \frac{1}{2}QE(d + \Delta x) - \frac{1}{2}QEd \\
&= \frac{1}{2}QE\Delta x \\
&= \frac{1}{2}Q\cdot\frac{V}{d}\Delta x \\
&= \frac{1}{2}QV\cdot\frac{1}{d}\cdot\Delta x \\
&= \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 L^2}\Delta x
\end{aligned}
$$

(2)

外力がした仕事＝静電エネルギーの増加より，$F\Delta x = \Delta U_{\mathrm{C}}$　$\therefore F = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 L^2}$　・・・(答)

別解

電荷が保存されるから，極板間の電界の強さ E は変化しない。

$V = Ed$ より，$E = \dfrac{V}{d}$

これと $Q = \dfrac{\varepsilon_0 L^2}{d} V$ より，$E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 L^2}$

E は，電極 1 がつくる電界と電極 2 がつくる電界の和であり，

両電界の強さは等しいから，1 つの電極がつくる電界の強さは $\dfrac{E}{2} = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 L^2}$

電極は相手の電極がつくる電界により引力を受けるから $F = Q \cdot \dfrac{E}{2} = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 L^2}$

補足

電荷 Q がつくる電界の強さ E の一般形: $E = \dfrac{Q}{\varepsilon \cdot S}$

S は電界の強さが一様になっている部分の面積である。

電荷 Q が点電荷のときの S

点電荷からの距離が r の球面の電界の強さは一様だから $S = 4\pi r^2$

電荷 Q が長さ l の線電荷のときの S

線からの距離が r の円柱の側面の電界の強さは一様だから $S = 2\pi rl$

電荷 Q が面積 S' の平板電荷のときの S

平板に垂直な面積 S の電界が平板の両側にできるから $S = 2S'$

コンデンサーに蓄えられる静電エネルギー

面積 S 、間隔 d で、電荷 Q が蓄えられた平行板コンデンサーの場合

面積 S で $+Q$ の平板がつくる電界の強さ $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 \cdot 2S}$

面積 S で $-Q$ の平板がつくる電界の強さ $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 \cdot 2S}$

したがって、両極板間の電界の強さは $E + E = 2E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 \cdot S}$

電位とは、「電界においた単位電荷(+1C)の静電気的位置エネルギー」という約束だから，

電界の強さが $2E$ の空間において電界の向きに距離 d 離れた 2 点間の電位差は

$V = 2Ed$ であり，これが極板間の電位差(電圧)である。

よって，極板間の電位差　$V=2Ed=\dfrac{Q}{\varepsilon_0\cdot S}d$　･･･①

一方，静電エネルギーは，

$+Q$ の極板と $-Q$ の極板間の距離が無限に 0 のときの極板間の静電エネルギーを 0 とし，

$+Q$ の極板がつくる電界中を，保存力（静電気力）とつり合いの外力（大きさ QE）により

$-Q$ の極板（電荷）をその電界の向きに距離 d だけ移動させたときに外力がした仕事（外力と極板の変位の内積）$QEd>0$ が極板間の静電エネルギー U となる。

よって，極板間の静電エネルギー　$U=QEd$ ･･･②

①より $Ed=\dfrac{V}{2}$ だから、これを②に代入することにより，極板間の静電エネルギー $U=\dfrac{1}{2}QV$

問 3

(1) $Q>\sqrt{2\varepsilon_0L^2mg}$

解説

時刻 $t=0$ の電極 2 はバネの自然長の位置だから，

この位置で電極 2 が受ける力は極板間の引力 F のみである。

したがって，電極 2 が上昇するためには，$F>mg$ を満たせばよい。

これと $F=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0L^2}$ より，$\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0L^2}>mg$　$\therefore Q>\sqrt{2\varepsilon_0L^2mg}$

(2) $\dfrac{2}{k}\left(\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0L^2}-mg\right)$

解説

位置 x における電極 2 に働く外力の和は，$F-mg-kx=-k\left\{x-\dfrac{1}{k}(F-mg)\right\}$

これは，電極 2 が座標 $x=\dfrac{1}{k}(F-mg)$ を振動中心とする単振動を行うことを示している。

また，電極 2 を放した位置 $x=0$ における速度は 0 だから，$x=0$ は振動下端である。

よって，単振動の振幅を A とすると，$A=\dfrac{1}{k}(F-mg)$

ゆえに，最上点の座標 $x_{\rm M}=\dfrac{1}{k}(F-mg)+A=\dfrac{1}{k}(F-mg)+\dfrac{1}{k}(F-mg)=\dfrac{2}{k}(F-mg)$

これと $F=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0L^2}$ より，$x_{\rm M}=\dfrac{2}{k}\left(\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0L^2}-mg\right)$

別解

$x=0$ を重力の位置エネルギーの基準位置とすると，エネルギー保存則より，

$$U_{\mathrm{C}}=U_{x_{\mathrm{M}}}+\frac{1}{2}k{x_{\mathrm{M}}}^2+mgx_{\mathrm{M}} \quad \therefore U_{x_{\mathrm{M}}}-U_{\mathrm{C}}=-\frac{1}{2}k{x_{\mathrm{M}}}^2-mgx_{\mathrm{M}}$$

問 2(1)より，電極間の距離を Δx（$\Delta x>0$）広げたときの静電エネルギーの変化は，

$$\Delta U_{\mathrm{C}}=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 L^2}\Delta x \ (\Delta x>0)$$

$\Delta U_{\mathrm{C}}=U_{x_{\mathrm{M}}}-U_{\mathrm{C}}$，$\Delta x=-x_{\mathrm{M}}$ だから，$U_{x_{\mathrm{M}}}-U_{\mathrm{C}}=-\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 L^2}x_{\mathrm{M}}$

よって，$-\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 L^2}x_{\mathrm{M}}=-\dfrac{1}{2}k{x_{\mathrm{M}}}^2-mgx_{\mathrm{M}} \quad \therefore \dfrac{k}{2}x_{\mathrm{M}}=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 L^2}-mg$

ゆえに，$x_{\mathrm{M}}=\dfrac{2}{k}\left(\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 L^2}-mg\right)$

(3)（C）

解説

電極の電荷 Q が保存されるから，電界は変化しない。

また，電極 1 が正，電極 2 が負だから，$E_x<0$

よって，正しいのは(C)。

問 4

$$U_{\mathrm{C}}-U_{\mathrm{R}_2}=\frac{1}{2}k{x_{\mathrm{M}}}^2+mgx_{\mathrm{M}}$$

解説

$x=x_{\mathrm{M}}$ における静電エネルギーを $U_{x_{\mathrm{M}}}$，$x=0$ を重力の位置エネルギーの基準位置とすると，

エネルギー保存則より，$U_{\mathrm{C}}=U_{x_{\mathrm{M}}}+\dfrac{1}{2}k{x_{\mathrm{M}}}^2+mgx_{\mathrm{M}}$

スイッチ S_2 を閉じて十分時間が経つと，$U_{x_{\mathrm{M}}}$ はすべて抵抗 R_2 で消費されるから，$U_{x_{\mathrm{M}}}=U_{\mathrm{R}2}$

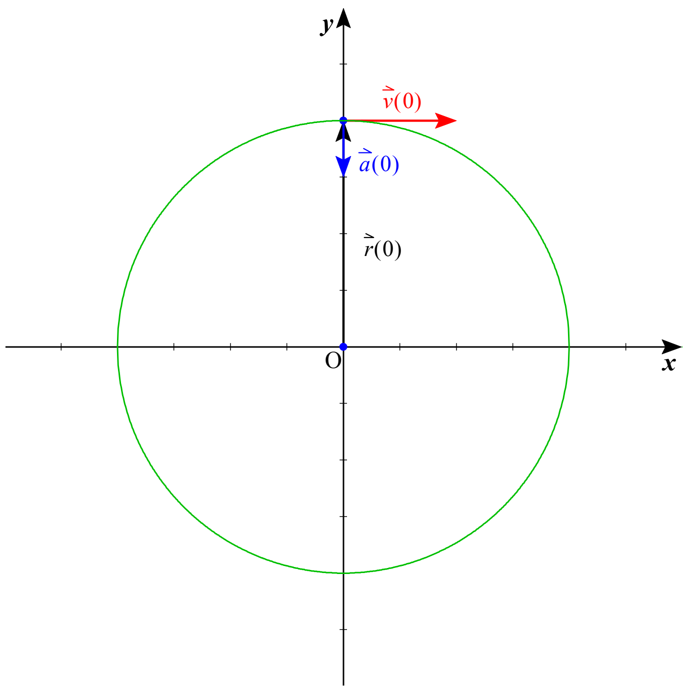
よって，$U_{\mathrm{C}}=U_{\mathrm{R}2}+\dfrac{1}{2}k{x_{\mathrm{M}}}^2+mgx_{\mathrm{M}}$ すなわち $U_{\mathrm{C}}-U_{\mathrm{R}2}=\dfrac{1}{2}k{x_{\mathrm{M}}}^2+mgx_{\mathrm{M}}$

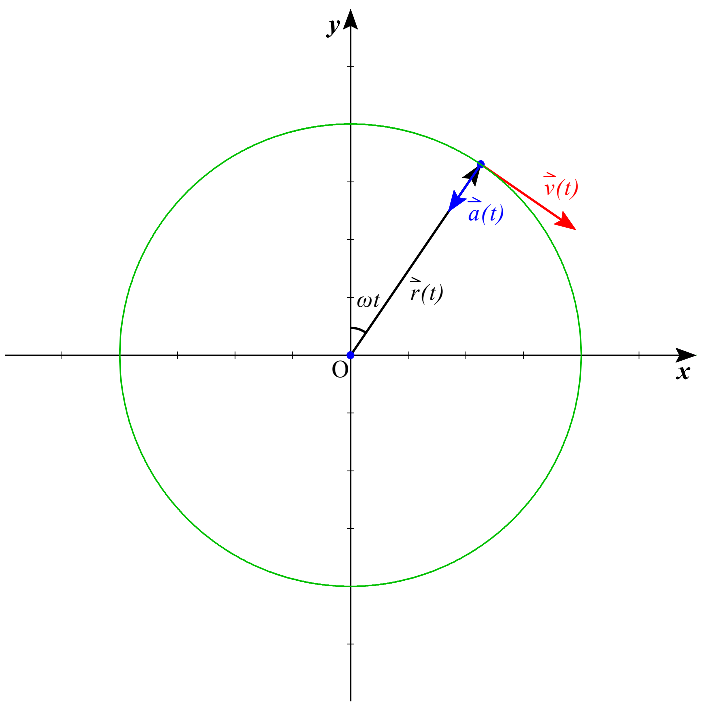
〔3〕

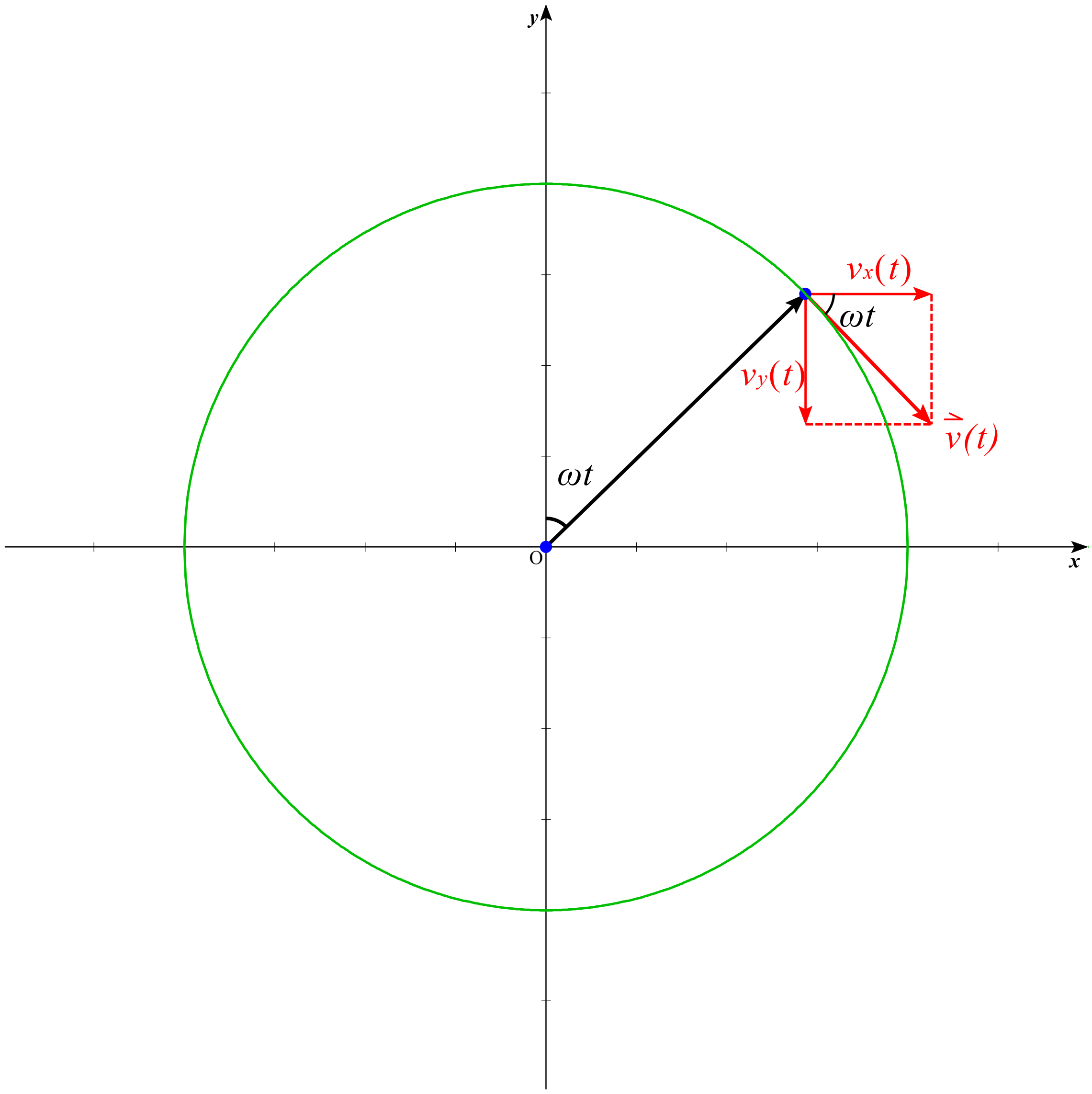
問 1

$\boxed{ア}$ $r\sin\omega t$ $\boxed{イ}$ $r\cos\omega t$ $\boxed{ウ}$ $r\omega$ $\boxed{エ}$ 0 $\boxed{オ}$ $r\omega\cos\omega t$ $\boxed{カ}$ $-r\omega\sin\omega t$ $\boxed{キ}$ 0 $\boxed{ク}$ $-r\omega^2$
$\boxed{ケ}$ $-r\omega^2\sin\omega t$ $\boxed{コ}$ $-r\omega^2\cos\omega t$

解説



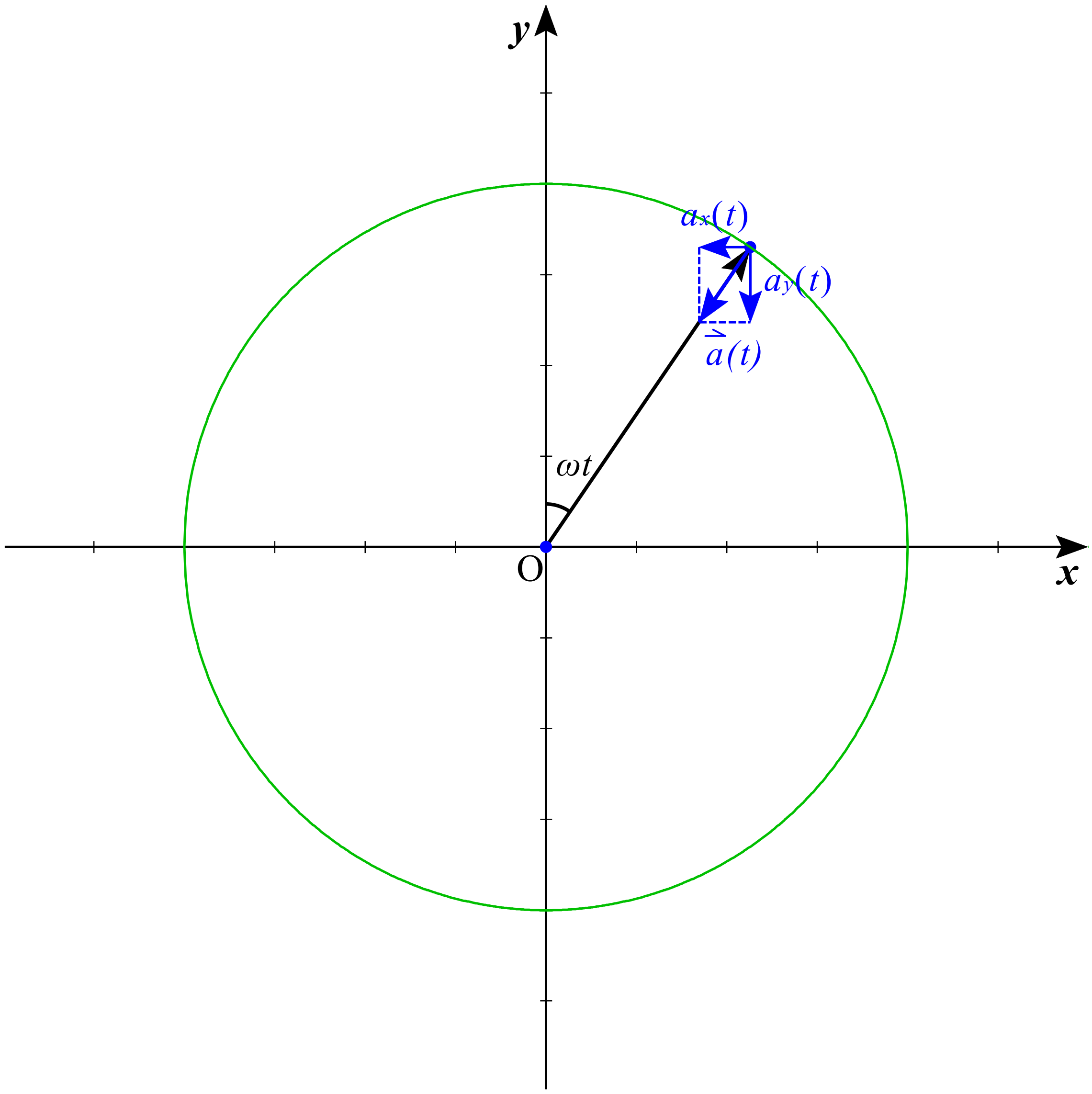




$\left|\vec{v}(t)\right| = r\omega$ より,

$v_x(t) = r\omega\cos\omega t$

$v_y(t) = -r\omega\sin\omega t$



$\left|\vec{a}(t)\right| = r\omega^2$ より,

$a_x(t) = -r\omega^2 \sin \omega t$

$a_y(t) = -r\omega^2 \cos \omega t$

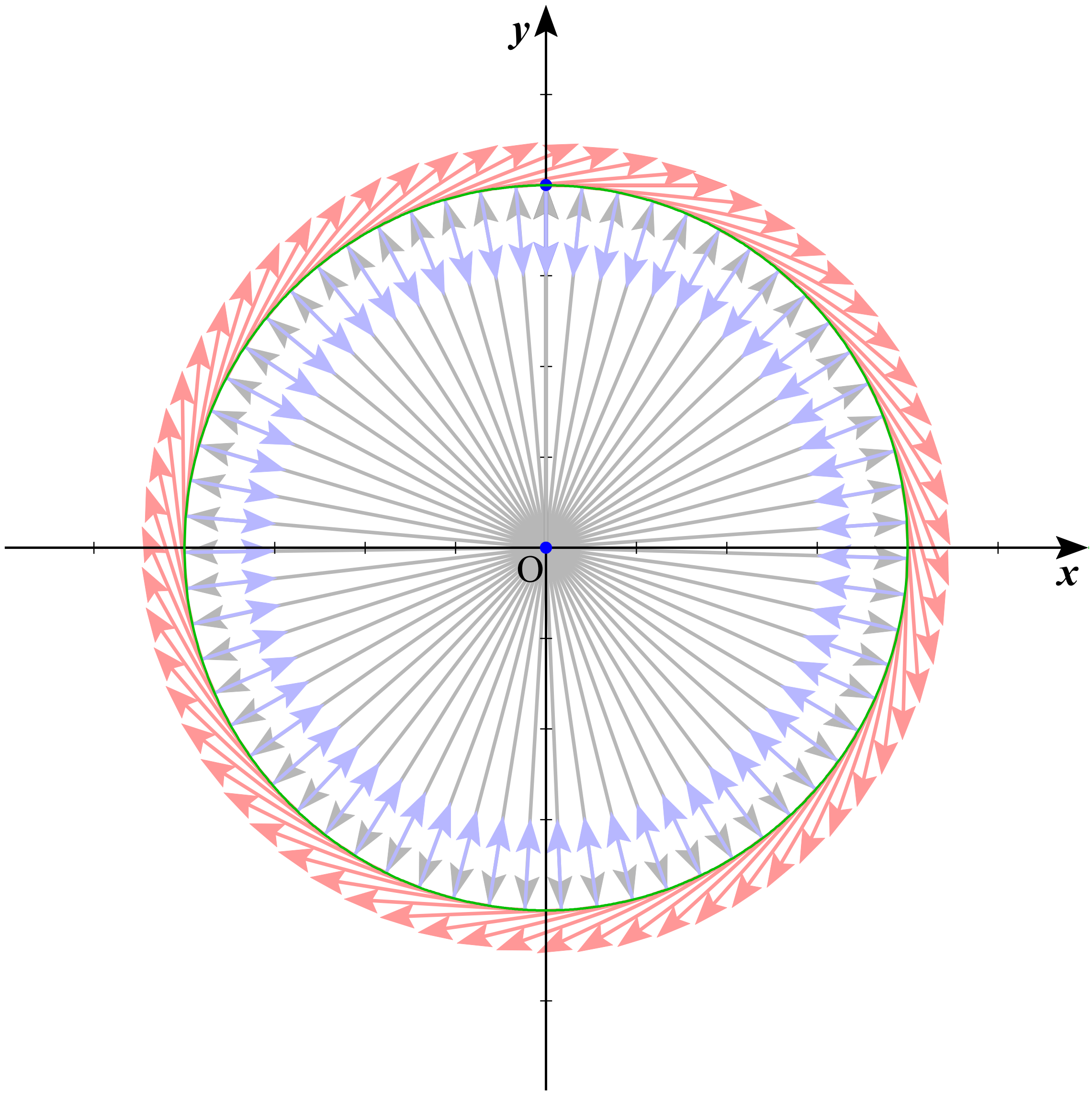
補足

幾何学的に解くように誘導しているが,

微分を使うと,

$$\vec{r}(t)=(r\sin\omega t, r\cos\omega t)$$
$$\vec{v}(t)=(r\omega\cos\omega t, -r\omega\sin\omega t)$$
$$\vec{a}(t)=(-r\omega^2\sin\omega t, -r\omega^2\cos\omega t)$$

おまけ



問 2

$\boxed{サ}$ $\omega t-\dfrac{2\pi d}{\lambda}$ $\boxed{シ}$ $\omega t+\dfrac{2\pi d}{\lambda}$ $\boxed{ス}$ $-r\omega^2\sin\omega t$ $\boxed{セ}$ $-2k\left(1-\cos\dfrac{2\pi d}{\lambda}\right)$ $\boxed{ソ}$ $\dfrac{2k}{m}\left(1-\cos\dfrac{2\pi d}{\lambda}\right)$

解説

$\boxed{サ}$・$\boxed{シ}$

図 6 において，長さλと位相2πが対応するから，長さdと対応する位相をδとすると，

$\dfrac{\delta}{2\pi}=\dfrac{d}{\lambda}$ より，$\delta=\dfrac{2\pi d}{\lambda}$

これとP番目の位相がωtであることから，

$P-1$番目の位相は$\omega t-\delta=\omega t-\dfrac{2\pi d}{\lambda}$

$P+1$番目の位相は$\omega t+\delta=\omega t+\dfrac{2\pi d}{\lambda}$

$\boxed{ス}$

$u_p(t)=r\sin\omega t$ より，$\dfrac{d^2}{dt^2}u_p(t)=-r\omega^2\sin\omega t$

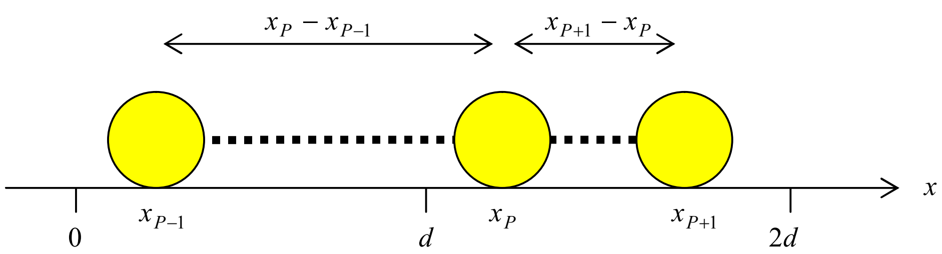
$\boxed{セ}$

$P-1$番目の物体の振動中心を$x=0$とすると，

$P-1$番目の物体の位置は$x_{P-1}=r\sin\left(\omega t-\dfrac{2\pi d}{\lambda}\right)$

P番目の物体の振動中心は$x=d$だから，その位置は$x_P=d+r\sin\omega t$

同様に，$P+1$番目の物体の位置は$x_{P+1}=2d+r\sin\left(\omega t+\dfrac{2\pi d}{\lambda}\right)$



$P-1$番目の物体とP番目の物体の間隔はx_P-x_{P-1}だから，

ばねの自然長からの伸びは$x_P - x_{P-1} - d = r\left\{\sin\omega t - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi d}{\lambda}\right)\right\}$

ばねが自然長より長いとき，すなわち$r\left\{\sin\omega t - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi d}{\lambda}\right)\right\} > 0$のとき

P番目の物体が受ける力は左向き，すなわち負の向きだから，

$F_1 = -kr\left\{\sin\omega t - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi d}{\lambda}\right)\right\}$ ・・・①

$P+1$番目の物体とP番目の物体の間隔は$x_{P+1} - x_P$だから，

ばねの自然長からの伸びは，

$x_{P+1} - x_P - d = r\left\{\sin\left(\omega t + \frac{2\pi d}{\lambda}\right) - \sin\omega t\right\}$

ばねが自然長より長いとき，すなわち$r\left\{\sin\left(\omega t + \frac{2\pi d}{\lambda}\right) - \sin\omega t\right\} > 0$のとき

P番目の物体が受ける力は右向き，すなわち正の向きだから，

$F_2 = kr\left\{\sin\left(\omega t - \frac{2\pi d}{\lambda}\right) - \sin\omega t\right\}$ ・・・②

よって，P番目の物体が左右のばねから受ける力の合力は，

$$
\begin{aligned}
F_1 + F_2 &= -kr\left\{2\sin\omega t - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi d}{\lambda}\right) - \sin\left(\omega t + \frac{2\pi d}{\lambda}\right)\right\} \\
&= -kr\left(2\sin\omega t - 2\sin\omega t\cos\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \\
&= -2k\left(1 - \cos\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \times r\sin\omega t
\end{aligned}
$$

ソ

解説

スより，P番目の物体の加速度は，$-r\omega^2\sin\omega t$

これとセより，P番目の物体の運動方程式は$-mr\omega^2\sin\omega t = -2k\left(1 - \cos\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \times r\sin\omega t$

よって，$\omega^2 = \frac{2k}{m}\left(1 - \cos\frac{2\pi d}{\lambda}\right)$